

8/5/2017

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος (δηλ. $A^T A = A A^T = I_n$).
Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A . Τότε $|\lambda| = 1$.

(Πόρεια: Άρα $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή του A τότε $\lambda \in \{1, -1\}$)

Απόδειξη: Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A . Τότε υπάρχει $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$
μη μηδενικό ώστε $Av = \lambda v$ (*)
Έχουμε (*) $\Rightarrow (Av)^T = (\lambda v)^T \Rightarrow \bar{A} \bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v} \Rightarrow A \bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v}$ (**)
Έχουμε $(\bar{v})^T v = \underbrace{(\bar{v})^T A^T A v}_{A \text{ ορθογ.}} = (A \bar{v})^T (Av)$

$$(*)(**) = (\bar{\lambda} \bar{v})^T (\lambda v) = (\bar{\lambda} \lambda) \bar{v}^T v = |\lambda|^2 \bar{v}^T v.$$

$$\text{Αρα παίρνοντας ίση } \text{Tr}(\bar{v}^T v) = \text{Tr}(|\lambda|^2 \bar{v}^T v) = |\lambda|^2 \text{Tr}(\bar{v}^T v) \\ \Rightarrow \text{στο } \mathbb{C} (\text{Tr}(\bar{v}^T v))(1 - |\lambda|^2) = 0$$

$$\text{Αλλά είδαμε } \text{Tr}(\bar{v}^T v) \neq 0 \text{ αφού } v \neq 0_{n \times 1}. \text{ Άρα } 1 - |\lambda|^2 = 0$$

Παράδειγμα: Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος και $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon \right) i$
με $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, ο πίνακας $A - \lambda v$ αντιστρέφεται.

Παράδειγμα, αρκεί ν.δ.ο λ όχι ιδιοτιμή του A . Από την πρόταση
αρκεί να δείξω $|\lambda| \neq 1$. Έχουμε $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon\right)^2}$
το οποίο με $\varepsilon > 0$ είναι διάφορο του 1.

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος. Τότε υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος

(χωρίς σπ.)

$$\text{ώστε: } P^T A P = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & B_q \end{bmatrix} \quad (1)$$

όπου κάθε $B_i \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ή $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ και αν B_i 1×1 , τότε

$$(*) B_i = [1] \text{ ή } [-1], \text{ αν } B_i \text{ } 2 \times 2 \text{ τότε υπάρχει } \Phi_i \in \mathbb{R} \text{ με}$$

$$(***) B_i = \begin{bmatrix} \cos \Phi_i & -\sin \Phi_i \\ \sin \Phi_i & \cos \Phi_i \end{bmatrix}$$

Αντίστροφα, κάθε πίνακας της μορφής (1) είναι ορθογώνιος

Παρατήρηση: Η πρόταση, μας δίνει το εγώ's αν θεωρήσουμε τους
τιμωρες (*), (**), (***) [redacted] κάθε ορθόγ. πινάκας.
ως προς εγώ's χτυπιέται από αυτά

Πρόταση: Έστω $\mathbb{R}^n$ με συνήθες εσωτερικό γινόμενο και $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ γραμμική μετασχηματισμός. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ (όχι αναγκαστικά η κανονική) ώστε

$$[T]_g^g = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_g \end{bmatrix} \quad (2)$$

(Παύει ότι ερίβος αν $[T]_g$ όπως (2) τότε ο T είναι
σταθερή ιδιότητα

Παράδειγμα: $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δοχ. 16047. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}$ με $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ (όρα $T = \text{id}_{\mathbb{R}}$) ή $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$ όρα $T = -\text{id}_{\mathbb{R}}$

$n=2 : \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{TAUTOTIKEN}$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{KOTOMY PIZIMOS}$$

$$[T]_g = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Γετρωφους κατα } \pi$$

$$[7]_g = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \leftarrow \text{67 padh'n karo } \theta$$

Παρατήρηση: Εστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Ευκλείδειος χώρος πεπερ. διαστάσεως, με $V \neq \{0\}$ και $T: V \rightarrow V$ γραμ. ισομετρία, τότε υπάρχει ορθοκ. βάση α του V ώστε

$[T]_g^g = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_g \end{bmatrix}$ και B_i 1×1 ή 2×2 όπως στην προηγούμενη πρόταση.

Πρόταση Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος, υποθέτουμε ότι 1 ιδιοτιμή του A και -1 ιδιοτιμή του A . Τότε οι ιδιοχώροι $V_A(1)$ και $V_A(-1)$ είναι κόβεται ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^{n \times 1}$

Απόδειξη: Υπενθυμ. αν $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, τότε

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$$

$$= \text{Tr}(w^T v)$$

(π.χ) Έστω $0 \neq v \in V_A(1)$, $0 \neq w \in V_A(-1)$ θ.δ.ο $\langle v, w \rangle = 0$

Έχουμε $Av = v$ $Aw = -w$ $\text{Tr}(w^T v) = \text{Tr}(w^T A^T v) = \text{Tr}((Aw)^T (Av))$

$$= \text{Tr}(-w^T v) = -\text{Tr}(w^T v)$$

Άρα $\text{Tr}(w^T v) = -\text{Tr}(w^T v)$ στο $\mathbb{R} \Rightarrow$

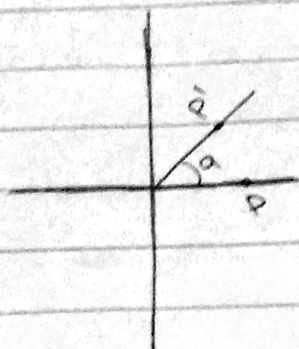
$$\text{Tr}(w^T v) = 0 \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

ΑΝΑΛΥΣΗ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος για $n=2$.

Παρακείμενο: από αυτό που έχουμε πει αναλυτικά κάνουμε ανάλυση γραμ. ιδιοτιμής $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με το σύνθετο... εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^2$

ΑΝΑΛΥΣΗ Υποθέτουμε $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ορθογώνιος. Δύο περιπτώσεις $\det A = 1$ ή $\det A = -1$

Περίπτωση 1: $\det A = 1$ Τότε υπάρχει (κανονικό αν $\phi \neq \pi$) $\phi \in [0, \pi]$ ώστε $A = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$ ή $A = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$



Στην πρώτη περίπτωση, ο A δίνει στροφή στο $\mathbb{R}^2$ κατά γωνία ϕ αντίστροφη αυτή τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Στη δεύτερη, ο A δίνει στροφή στο $\mathbb{R}^2$ κατά γωνία ϕ ωρολογιακή με την φορά των δεικτών του ρολογιού.

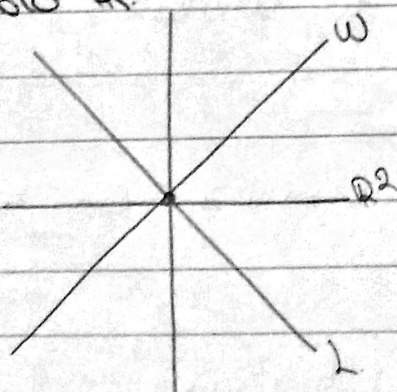
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ $\mathbb{C}$

	ΙΔΙΟΤΗΤΗ	ΑΛΓ. ΠΟΛ/ΤΑ	ΓΕΩΜ. ΠΟΛ/ΤΑ	
Αν $\phi = 0$	$1 = \cos\phi + i\sin\phi$	1	1	ΤΑΥΤΟΤΗΤΗ ΑΝΕΚΔΟΤΗ
Αν $\phi = \pi$	$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$	1	1	
Αν $\phi \in (0, \pi)$	$\cos\phi + i\sin\phi$	1	1	ΚΟΤΥΠΤΡΙΣΜΟ ΣΤΙΣ ΠΡΟΣ. ΑΡΧΗ $A \in \text{O}(2, \mathbb{C})$
	$\cos\phi + i\sin\phi$	1	1	

Περίπτωση 2: $\det A = -1$

Θέτουμε $W = \ker A$, $L = \ker A^T$

Τότε $\dim_{\mathbb{R}} W = \dim_{\mathbb{R}} L = 1$ και W, L ορθογωνιστικοί στο $\mathbb{R}^2$.



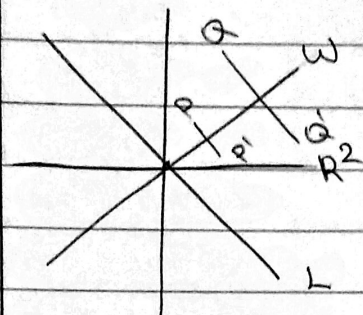
Έστω e_1 ορθοκ. βάση του W (δηλ. $e_1 \in W$ μήκους 1) και e_2 ορθοκανονική βάση του L . Θέτουμε $P = [e_1 | e_2]$. Τότε $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ορθογώνιος και $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Γεωμετρικά A ορθογώνιος κατοπτρισμός στο $\mathbb{R}^2$ προς την ευθεία W (δηλ. στο σχήμα $P \mapsto P'$, $Q \mapsto Q'$)

Με άλλα λόγια ο A αντιστοιχεί στην γραμ. απεικόνιση $a e_1 + b e_2 \mapsto a e_1 - b e_2$

	ιδιοτιμή	ολ. πολ.	βασ. πολ.
ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$	1	1	1
	-1	1	1

και A διαγωνιος επί του $\mathbb{H}$.



(ΠΑΡΕΥΘ. Αν $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ορθογώνιος με $\det A = 1$ και $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \text{Tr}(A) = \text{Tr}(AP^{-1}P) = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = 2 \cos \phi$$

$$\forall \phi \quad \cos \phi = \frac{\text{Tr}(A)}{2}$$